САБАҚТЫҢ МАҚСАТЫ, МІНДЕТТЕРІ, ӘДІСТЕМЕЛІК ДЕҢГЕЙІ

Қазіргі заман - математика ғылымының өте кең, жан-жақты тараған кезеңі. Оқушылардың математикалық сауаттылығын арттыру, олардың алған білімінің тиянақты болуын қамтамасыз ету, алған білімін қолданбалы мақсатқа бағыттау - заман талабы болып отыр. Оқушылардың математикалық сауаттылығын жан-жақты жетілдіру – қазіргі аса маңызды міндеттердің бірі. Дарынды балалардың қабілетін дамытудың жолдары жеткілікті. Оқушылардың пәнге қызығушылығын оятатын, олардың математикалық ой-өрісінің, шығармашылық қабілетінің дамуына дәнекер болатын қосымша тақырыптар мен сұрақтар көп әсерін тигізеді. Мұндай сұрақтарды орта мектепте арнайы сабақтарда, факультативтік сабақтарда қарастырудың ерекше маңызы бар. Сондай сұрақтардың бірі - векторлардың ғылыми зерттеулерде кең түрде қолданысқа ие болуы, олимпиада есептерінде қолдану әдістемесін құру. Қазіргі дәріс сабағында векторларды геометриялық және алгебралық есептерді шығаруға қолдану әдістемесі көрсетіледі.

Сабақтың мақсаты: **Векторлар алгебрасын қолданып геометриялық және алгебралық есептер шығаруға үйрету.**

Міндеті:

- **Векторларды қолданып геометрия есептерін шығару;**
- **Векторларды қолданып алгебра есептерін шығару**

Дәрісті меңгеру барысында оқушылар төмендегідей құзіреттілікке ие болу қажет:

***Білу қажет*:**

- **Векторлық алгебраны.**

Істей білу қажет:

- **Векторларға арифметикалық амалдар (қосу, азайту, санға көбейту және қасиеттері) қолдануды;**
- **Векторларды салу (координаталары немесе нүктелер арқылы).**

Әдістемелік деңгейі: **Геометриялық есептерді алгебраландыру немесе алгебралық есептерді геометрияландыру әдіс-тәсілдерін іріктеу, ғылыми және ақпараттық тұрғыда баяндау.**

ВЕКТОРЛАРДЫҢ МАҢЫЗЫ

- **Векторлық талдауды математикалық есептермен қатар физика, химия, металлургия, колориметрия, интерполяция, генетика және топология салаларының сұрақтарын зерттеуге де қолдануға болады. Мұнда инерция моменті түсінігінің математикалық моделін, барицентрлік координаларды және ғылым салаларының заңдылықтарын қолдану арқылы модельдер құру қажет болады.**
- **Векторларды қолдану геометриялық есептерді алгабралық түрде, немесе алгебралық есептерді**

геометриялық түрде шығаруға мүмкіндік береді. Сонымен қатар, векторларды қолдану ақпаратты ықшамдауға,

көрнекі етіп көрсетуге және есепті шешу үшін қажетті дәлелдемелерді іздестіруге мүмкіндік береді.

Есеп 1. Кез келген төртбұрыштың орта сызықтары қиылысып, тең екі бөліктерге бөлінетіндігін дәлелдеңдер (сонымен қатар,олар төбелері төртбұрыштың қабырғаларының орталары болатын параллелеограмның диагональдары болып табылады).

Шешуі. **ABCD - берілген төртбұрыш болсын (жазық болуы міндетті емес). K, L, M, N - сәйкес AB, BC, CD, DA қабырғалардың орталары болсын. Барлық векторлар полюс деп талатын бір O нүктесынен басталсын, яғни олар радиус – векторлар болсын, сонда вектордың атауын оның ұшы арқылы белгілеу жеткілікті. K нүктесі AB кесіндісінің ортасы болғандықтан $\vec{K}=\frac{1}{2}(\vec{A}+\vec{B})$ теңдігі орынды болады.**

Сол сияқты, $\vec{L}=\frac{1}{2}(\vec{B}+\vec{C})$, $\vec{M}=\frac{1}{2}(\vec{A}+\vec{C})$, $\vec{N}=\frac{1}{2}(\vec{D}+\vec{A})$. X және Y - сәйкес KM және LN кесінділерінің орталары болсын. Сонда,

$\vec{Y}=\frac{1}{2}(\vec{L}+\vec{N})=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\vec{B}+\vec{C})+\frac{1}{2}(\vec{D}+\vec{A})\right]=\frac{1}{4}(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D})$**, яғни X және Y нүктелері беттеседі.**

Есеп 2. Қабырғаларының орталары арқылы көпбұрыш салыңдар.

Шешуі. **Есепті үшбұрыш жағдайында оның орта сызығының қасиетін пайдаланып шығару қиындық туғызбайды.**

Егер есептегі нүетелер санын төртке, беске немесе көптеген нүктелерге жалпыласа, яғни көпбұрыш салу есебіне жалпыласа, онда үшбұрыштыштың орта сызығы туралы пікірдің мағынасы болмайды. Мұндай түрдегі есептерді мейлінше жалпылама тәсілі - векторларды қолданып орындалуы мүмкін.

Алдымен, үш нүкте (үшбұрыш қабырғалар орталары) берілген жағдайдағы векторлық әдісті көрсетелік. ABC - ізделінді үшбұрыш болсын. Берілген K, L, M - сәйкес AB, BC, AC қабырғаларының орталары. Сонда осы нүктелерге және белгісіз A, B, C нүктелерге қатысты сызықтық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} \vec{K}=\frac{1}{2}\left(\vec{A}+\vec{B}\right), \\ \vec{L}=\frac{1}{2}\left(\vec{B}+\vec{C}\right), \\ \vec{M}=\frac{1}{2}\left(\vec{A}+\vec{C}\right). \end{cases}$$

Бұл теңдеулер жүйесінің шешімі:

$$\begin{cases} \vec{A}=\vec{K}+\vec{M}-\vec{L}, \\ \vec{B}=\vec{K}+\vec{L}-\vec{M}, \\ \vec{C}=\vec{L}+\vec{M}-\vec{K}. \end{cases}$$

болады.

Біз алдынала үшбұрыштың белгісіз төбелерін таптық, енді оларды қалай салуға болады? Бұл сұраққа жауап: Кез келген O полюсін таңдап алып, $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OL}$, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OK}$ **векторлық теңдіктер бойынша A, B, C нүктелерін салу қиындық туғызбайды. Мұнда O нүктесін қандай орыннан таңдап алсақ та ізделінді үшбұрыш жалғыз болады.**

Енді бұл есептің жалпылама жағдайын қарастыралық. Мұнда көпбұрыштың қбырғаларының орталары жұп немесе тақ болу жағдайларда нәтиже әртүрлі болуы мүмкін. Сондықтан, алдымен көпбұрыштың қбырғаларының орталарының саны n тақ болған жағдайды қарастыралық. Айталық, қабырғаларының орталары берілген бесбұрыш салу қажет болсын. Ізделінді бесбұрышты $X_1X_2X_3X_4X_5$ **деп белгілелік, ал** A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 **- сәйкес** $X_1X_2, X_2X_3, X_3X_4, X_4X_5, X_5X_1$ **қабырғалардың берілген орталары болсын. Сонда алдыңғы есепке ұқсас теңдеулер жүйесін құралық:**

$$\begin{cases} \vec{X}_1 + \vec{X}_2 = 2\vec{A}_1, \\ \vec{X}_2 + \vec{X}_3 = 2A_2, \\ \vec{X}_3 + \vec{X}_4 = 2\vec{A}_3, \\ \vec{X}_4 + \vec{X}_5 = 2\vec{A}_4, \\ \vec{X}_5 + \vec{X}_1 = 2\vec{A}_5. \end{cases}$$

Бұл жүйені X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 белгісіздері бойынша шешеміз. Ол үшін бірінші теңдеуден екінші теңдеуді шегереміз, соден соң, оған үшінші теңдеудіқосамыз, одан кейін одан төртінші теңдеуді шегереміз, ең соңында бесінші теңдеуді қосып, аламыз: $\vec{X}_1 = \vec{A}_1 - \vec{A}_2 + \vec{A}_3 - \vec{A}_4 + \vec{A}_5$.

Полюс таңдап алу және векторлық амалдарды орындау нәтижесінде X_1 нүктесі салынады. Сол сияқты, қадған X_2, X_3, X_4, X_5 нүктелерін де салуға болады. Есептің жлғыз шешімі болады. Осыған ұқсас кез келген тақ санды қабырғалы көпбұрыштарды қабырғаларының орталары берілгенде салуға болады.

Енді ізделінді белгісіз төбелер саны жұп болған жағдайды қарастыралық.

- **Ізделінді нүктелер саны екеу болған жағдай, яғни кесіндінің ортасы берілгенде, кесіндіні салу. Бұл жағдайда, есеп шексіз көп шешімге ие болады. Шынында да, $X_1X_2X_3X_4$ төртбұрышының қабырғаларының орталары берілсін, олар A_1, A_2, A_3, A_4 - сәйкес $X_1X_2, X_2X_3, X_3X_4, X_4X_1$ қабырғалардың берілген орталары болсын. Жоғарыдағы пайымдаулар бойынша аламыз:**

$$\begin{cases} \vec{X}_1 + \vec{X}_2 = 2\vec{A}_1, \\ \vec{X}_2 + \vec{X}_3 = 2A_2, \\ \vec{X}_3 + \vec{X}_4 = 2\vec{A}_3, \\ \vec{X}_4 + \vec{X}_1 = 2\vec{A}_4. \end{cases} \qquad (*)$$

Мұнда жүйенің үйлесімділігінің қажетті шарты: $\vec{A}_1 - \vec{A}_2 + \vec{A}_3 - \vec{A}_4 = \vec{0}$ болып табылады.

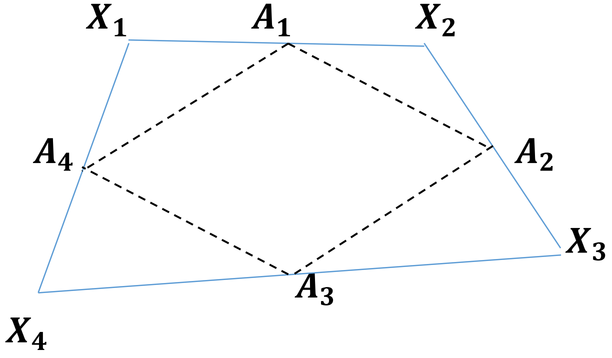
Егер $\vec{A}_1 - \vec{A}_2 + \vec{A}_3 - \vec{A}_4 \neq \vec{0}$ болса, онда жүйе шешімге ие болмайды. Бұл шартқа геометриялық түсінік берелік. Басқаша айтқанда, A_1, A_2, A_3, A_4 нүктелері параллелеограмның төбелері болып табылады. Егер бұл орындалмаса, онда есеп шешімге ие болмайды. Егер бұл пікір орынды болған жағдайда есептің қанша шешімі болуы мүмкін? Бұған сәйкес, параллелеограм берілген жағдайда, оның төбелері қабырғалардың орталары болатын шексіз көп төртбұрыштар алуға болатынын көрсетелік.

$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_4A_3}$ болсын, яғни A_1, A_2, A_3, A_4 - параллелеограмның төбелері болсын. Кез келген X_1 нүктесін алып, XA_1 кесіндісін саламыз да, оны тең ұзындыққа X_2 нүктесіне дейін созамыз; X_2A_2 кесіндісін салып, оны тең ұзындыққа X_3 нүктесіне дейін созамыз; X_3A_3 кесіндісін салып, оны тең ұзындыққа X_4 нүктесіне дейін созамыз. Енді A_4 нүктесінің X_4X_1 кесіндісінің ортасы екенін дәлелделік. (сурет 1).

$\vec{A}_1 - \vec{A}_2 + \vec{A}_3 - \vec{A}_4 = \vec{0}$ теңдіктен, $\vec{A}_4 = \vec{A}_1 + \vec{A}_3 - \vec{A}_2$.

Сонда $\vec{X}_4 + \vec{X}_1 = (2\vec{A}_3 - \vec{X}_3) + (2\vec{A}_1 - \vec{X}_2) = 2\vec{A}_3 + 2\vec{A}_1$-$2\vec{A}_2$, бұдан $\frac{1}{2}(\vec{X}_4 + \vec{X}_1) = \vec{A}_1 + \vec{A}_3 - \vec{A}_2$.

Демек, $\vec{A}_4 = \frac{1}{2}(\vec{X}_4 + \vec{X}_1)$, яғни A_4 - X_1X_4 кесіндісінің ортасы болып табылады. Таңдап алынған X_1 нүктесі кез келген болғандықтан шынында да ізделінді төртбұрыш саны шексіз көп болады. Есептің шексіз көп шешімдерге ие болатынын алгебралық (*) теңдеулер жүйесінің анықтауышының нөлге тең болатынынан да байқауға болады. A_1, A_2, A_3, A_4 нүктелері кеңістікте (бір жазықтыққа тиісті болуы міндетті емес) орналасқан жағдайла да пікір орынды болады. Осындай нәтиже басқа жұп санды қабырғалы көпбұрыштар үшін де орынды болады.



Сурет 1.

Енді материалдық нүктелер жүйесінің ауырлық центрін қолданып геометриялық есептер қарастыралық. Айталық, A_1, A_2, ... , A_n - берілген орынды болатын P нүктесі материалдық A_1, A_2, ... , A_n нүктелер жүйесінің *массалар центрі (центроид)* деп аталады. Егер P нүктесі материалдық A_1, A_2, ... , A_n нүктелер жүйесінің центроиды болса, онда кеңістіктің кез келген O нүктесі $\overrightarrow{OP} = \frac{m_1\overrightarrow{OA_1}+m_2\overrightarrow{OA_2}+\cdots+m_n\overrightarrow{OA_n}}{m_1+m_2+\cdots+m_2}$ теңдігі орынды болады. Векторларды қолданып массалар центрі түсінігін геометриялық есептер шығаруға пайдаланудың мынадай механикалық мағынасы бар:

1) Саны шекті материалдық нүктелер жүйесі жалғыз массалар центріне ие болады.

2) Екі материалдық нүктелер жүйесінің массалар цкетрі (осы нүктелерді қосатын кесіндіде орналасқан) рычагтің Архимед ережесі («механиканың алтын ережесі») бойынша анықталады.

3) Егер саны шекті материалдық нүктелер жүйесінде бірнеше нүктелерді белгілеп, олардың массаларын массалар центріне орналастырғаннан барлық жүйенің массалар центрі өзгермейді.

Есеп 3.* PABC *дұрыс үшбұрышты пирамиданың* PA, PB, PC *қырларын, төбесінен бастап есептегенде, сәйкес* 2:5, 3:5, 4:5 *бөліктерге бөлетін* П *жазықтық жүргізілген.* П *жазықтығы пирамиданың* PH *биіктігін қандай бөліктерге бөледі?

***Шешуі.* A_1, A_2, A_3 - П жазықтығының сәйкес PA, PB, PC қырлармен қиылысу нүктелері блсын. A, B, C нүктелерінің әрқайсысына 1-ге тең масалар орналастыралық. Сонда $|AP| = \frac{5}{2}|A_1P_1|$, яғни $|AA_1| = \frac{3}{2}|A_1P_1|$ болғандықтан, $\frac{5}{2}\cdot\vec{A_1} = 1\cdot\vec{A} + \frac{3}{2}\cdot\vec{P}$, A_1 - $1A$ және $\frac{3}{2}P$ нүктелерінің массалар центрі болады.**

Сол сияқты, $\frac{5}{3}\cdot\vec{B_1} = 1\cdot\vec{B} + \frac{2}{3}\cdot\vec{P}$, $\frac{5}{4}\cdot\vec{C_1} = 1\cdot\vec{C} + \frac{1}{4}\cdot\vec{P}$. Пирамида дұрыс болғандықтан $3\cdot\vec{H} = 1\cdot\vec{A} + 1\cdot\vec{B} + 1\cdot\vec{C}$.

Q - қарастырып отырған алты нүктелердің массалар центрі болсын делік, яғни

$$1\cdot\vec{A} + \frac{3}{2}\cdot\vec{P} + 1\cdot\vec{B} + \frac{2}{3}\cdot\vec{P} + 1\cdot\vec{C} + \frac{1}{4}\cdot\vec{P} = \frac{65}{12}\cdot\vec{Q},$$

$$\frac{65}{12}\cdot\vec{Q} = (1\cdot\vec{A} + \frac{3}{2}\cdot\vec{P}) + (1\cdot\vec{B} + \frac{2}{3}\cdot\vec{P}) + (1\cdot\vec{C} + \frac{1}{4}\cdot\vec{P}) = \frac{5}{2}\cdot\vec{A} + \frac{5}{3}\cdot\vec{B} + \frac{5}{4}\cdot\vec{C}, \text{ бұдан } Q \in П.$$

Басқаша топтастырып, аламыз: $\frac{65}{12}\cdot\vec{Q} = (1\cdot\vec{A} + 1\cdot\vec{B} + 1\cdot\vec{C}) + (\frac{3}{2}\cdot\vec{P} + \frac{3}{2}\cdot\vec{P} + \frac{1}{4}\cdot\vec{P}) = 3\cdot\vec{H} + \frac{29}{12}\cdot\vec{P}$, **бұдан** $Q \in [PH]$.

Демек, Q - П жазықтығы мен [PH] кесіндісінің қиылысу нүктесі. Соңғы теңдіктен Q нүктесінің $\frac{29}{12}P$ және $3H$

материалдық нүктелердің массалар центрі екендігін көреміз, рычаг ережесі бойынша $\frac{29}{12}|PQ| = 3|QH|$, бұдан

$$|PQ| = \frac{36}{65}|QH|.$$

Енді векторларды алгебралық есептерді шығаруға қолданалық.

Екі айнымалысы бар екі сызықтық теңдеулер жүйесі берілсін: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$ (1)

(1) жүйені векторлық түрде жазалық: $x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} = \vec{c}$, (2)

мұндағы $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$, $\vec{c} = (c_1; c_2)$. (1) теңдеулер жүйесінің шешімдерінің бар болу және олардың саны оған мәндес (2) шартты қанағаттандыратын (x, y) сандарын табуға келтіріледі. Бұл сұрақтың жауабы мынадай: егер $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары коллинеар болмаса, онда кез келген $\vec{c}$ векторы осы векторлар арқылы жазықтықта жалғыз түрде жіктеледі, бұл жіктелудегі x және y сандары бірмәнді анықталады, яғни жүйе жалғыз шешімге ие болады. Ал егер $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары коллинеар болса, онда сұраққа жауап $\vec{c}$ векторына байланысты. Бұл жағдайда $\vec{c}$ векторы $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларына коллинеар болмаса, онда жүйенің шешімі болмайды, яғни үйлесімсіз. Егер $\vec{c}$ векторы $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларына коллинеар болса, онда ізделінді x және y сандар шексіз көп болады.

(2) векторлық теңдеуді шешу үшін векторлардың скаляр көбейтіндісі, ортогональ векторлар түсінігі қажет болады. Нөлдік емес $\vec{x}^*$ векторы $\vec{x}$ векторына ортогональ деп аталады, егер $\vec{x}^* \cdot \vec{x} = \vec{o}$ болса. Сонда (2) векторлық теңдеудің шешімі:

$$\vec{x} = \frac{\vec{c} \cdot \vec{b}^*}{\vec{a} \cdot \vec{b}^*}, \vec{y} = \frac{\vec{c} \cdot \vec{a}^*}{\vec{b} \cdot \vec{a}^*}. \quad (3)$$

Сол сияқты, жалпы сызықтық теңдеулер жүйесі үшін де осындай пайымдаулар орынды болады.

Есеп 4. $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$ *дәлелдеңдер.*

Шешуі. Теңсіздікті дәлелдеу үшін $\vec{x}=(a;b), \vec{y}=(c;d)$ векторларын қарастыралық. Сонда $|x|=\sqrt{a^2+b^2}$, $|y|=\sqrt{c^2+d^2}$, $|\vec{x}+\vec{y}|=\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$ теңдіктерден берілген теңсіздіктің дұрыстығы орынды $|\vec{x}+\vec{y}| \geq |\vec{x}|+|\vec{y}|$ теңсіздігінен алынады.

Есеп 5. *Дәлелдеңдер:* $Sin\alpha \cdot Sin\beta + Cos\alpha + Cos\beta \leq 2.$

Шешуі. Теңсіздіктің сол бөлігін мына түрде жазалық:

$Sin\alpha \cdot Sin\beta + Cos\alpha + Cos\beta = Sin\alpha \cdot Sin\beta + Cos\alpha \cdot 1 + 1 \cdot Cos\beta$, мұнда $\vec{x}=(Sin\alpha; Cos\alpha; 1), \vec{y}=(Sin\beta; 1; Cos\beta)$ болсын.

Енді Коши-Буняковский теңсіздігі бойынша: $(\vec{x}\cdot\vec{y})^2 \leq |\vec{x}|^2 \cdot |\vec{y}|^2$,

$$(Sin\alpha \cdot Sin\beta + 1\cdot Cos\alpha + 1\cdot Cos\beta)^2 \leq \left(Sin^2\alpha + Cos^2\alpha + 1^2\right)\left(Sin^2\beta + 1^2 + Cos^2\beta\right) = 2\cdot 2, \text{ бұдан}$$

$$Sin\alpha \cdot Sin\beta + Cos\alpha + Cos\beta \leq 2.$$

Есеп 6. *Дәлелдеңдер:* $\sqrt[3]{x_1x_2x_3} < \frac{x_1+x_2+x_3}{3}.$

Шешуі. Бұл теңсіздікті массалар центрінің қасиетін пайдаланып шығаралық. Ол үшін негізі 1-ден артық болатын логарифмдік функцияның, айталық, ондық логарифмдік функцияның, графигінен $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$, $A_3(x_3; y_3)$ үш нүкте алалық. Бұл нүктелер жүйесінің массалар центрі $\vec{P}=\frac{1}{3}\left(\vec{A_1}+\vec{A_2}+\vec{A_3}\right)$ радиус-векторға ие болады. Сондықтан массалар центрінің координаталары: $x_P=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$, $y_P=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$.

Негізі 1-ден артық логарифмдік функцияның графигі дөңес болады, яғни оның графигі A_1A_2, A_1A_3 хордалардан жоғары орналасады. P центроиды $A_1A_2A_3$ үшбұрышының ішінде орналасады A_1A_2, A_1A_3 хордалардан жоғары орналасады. Демек, P нүктесі абсциссалары бірдей болатын функция графигінің нүктесінен төмен орналасқандықтан

$$y_P < \lg x_P, \text{ яғни } y_P=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3) < lg\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3),$$

$$\frac{1}{3}lg(x_1+x_2+x_3) < lg\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3), \text{ бұдан, } \sqrt[3]{x_1x_2x_3} < \frac{x_1+x_2+x_3}{3}.$$

ӘДЕБИЕТТЕР

1. Габович И.Г. Алгоритмический подход к решению геометрических задач: Книга для учащихся. – М.: Просвещение: АО «Учебная литература», 1996 г.
2. Скопец З.А. Векторное решение геометрических задач (задачник-практикум по спецсеминару). – М.: Просвещение, 1968 г.
3. Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии (стереометрия). – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984 г.
4. Шклярский Д.Ю., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Геометрия (планиметрия). – 3-е изд. – М.: Физматлит, 2000 г..
5. Куланин Е.Д., Федин С.Н. 5000 конкурсных задач по математике. – М.: ООО «Фирма "Издательство АСТ"», 1999 г.
6. Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. Нестандартные методы решения уравнений и неравенств. Справочное пособие. – М.: МГУ, 1991 г.
7. Супрун В.П. Избранные задачи повышенной сложности по математике. Мн.: Полымя, 1998 г.
8. Супрун В.П. Нестандартные методы задач по математике – Мн.: Полымя, 2000 г.